数理解析研究所講究録
165巻 1972年 22-68

局所コンパクト群の指標の理論とリー群の指標の積分表示について

京大 理　平井 武

この稿の目的は，主として，リー群の指標の積分表示に関する結果をまとめ，その方法の将来性と限界とを検討しようということにある．一般には，半単純リー群の場合と異なり可解リー群に対してさえ，その既約ユニタリ表現に指標が定義できるものとできないものがある．その辺の事情を明らかにしておいた方がよいと思われるので，C^*代数の理論から局所コンパクト群の指標についての一般論を必要最小限抜き出しまとめてみた．それが序論のうち §1 である．主として J. Dixmir [3(c)] に依っている．§2では半単純リー群の指標について，今迄得られている結果と使われた方法について概括した．§§3-10は本論であり，連結リー群を取扱う．§3ではいわゆる "Method of Orbits" とくに指標の積分表示とは何かを述べる．一言でいえば，これは G のリー環を $\mathfrak{g}$ の双対空間を $\mathfrak{g}'$ とするとき

coadjoint表現（随伴表現の双対）による $\mathfrak{g}'$ の G-軌道を種々利用することである、ついで§4では巾零群§5では Exponential Lie group（可解群の一種），§6では可解群を取扱う、A.A. Kirillov, L. Pukanszky による指標の計算（または積分表示といってもよい）を述べるのであるが，そのためには既約ユニタリ表現の構成法に触れざるを得ないのでできるだけ簡潔にそれをまとめておいた、§7ではコンパクト半単純群を取扱う§8では複素半単純リー群（E.A. Gutkin），§9では実半単純リー群（M. Duflo）の連続主系列の表現の指標の積分表示について述べた、§10では Kirillov が一般のリー群の指標を積分表示しようとして作ったプログラムのうち，Gの表現Tを適当な部分群Pの表現Lを誘導して作り Lの指標が積分表示できればTでもできるという"reduction theorems"について述べる、彼は一方の極端として半単純群と巾零群をとり その他の群はそれら極端な場合に帰着させようというのである、

さて，筆者は命題を述べるに当っては条件と結果は厳密に述べた、そして出所を明らかにして読者が自ら検索できるようにし，この小文がいささかでも役に立つようにと願った、しかし殆ど証明は述べられず，またその

信用度についても私自身検討済みのものばかりではないことをお断りしておかねばならない。最後に、§1.6の問題1.1や§§5-6の結果の拡張など一考の価値があると思われる。　（1972）

目次

序論　指標について

§1、局所コンパクト群の指標（一般論）

§2、半単純リー群の指標（現状）

本論、リー群の指標の積分表示

§3、Method of Orbits とくに指標の積分表示について

§4、巾零リー群の表現の構成と指標

§5、Exponential Lie groups の表現の構成と指標

§6、可解リー群の表現の構成と指標

§7、コンパクト半単純リー群の指標の積分表示

§8、複素半単純リー群の連続主系列の表現の指標の積分表示

§9、実半単純リー群の連続主系列の表現の指標の積分表示

§10、Kirillov の "Reduction Theorems" について

引用文献表

序論、　指標について

§1. 局所コンパクト群の指標（一般論）[3(c)]

1.1. 記号と定義

今後用いる記号をまとめて表にしておく。今 G を局所コンパクト群とする。

$\hat{G}$：Gの既約ユニタリ表現（IUR）の同値類全体，
位相を考えるときは hull-kernel topology を入れる。

$dg = d_r g$：Gの右不変Haar測度．

$\Delta(g) = \Delta_r(g)$：　$d(g_0 g) = \Delta(g_0)dg$　なるGのmodular函数．

$L^1(G)$：dgに関するL^1，ノルムは $\|\cdot\|_1$ とかく．

$$f \in L^1(G)\ ;\quad f^*(g) = \Delta(g)^{-1}\overline{f(g^{-1})}\ ,\quad \hat{f}(g) = \overline{f(g^{-1})}.$$

$$f_1, f_2 \in L^1(G)\ ;\quad f_1 * f_2(g) = \int_G f_1(gh^{-1})f_2(h)\,dh.$$

T：Gのヒルベルト空間$\mathcal{H}$上のユニタリ表現（$g \to T(g)$ 強連続）．

$$T(f) = \int_G T(g)f(g)\,dg \qquad (f \in L^1(G)).$$

$T_1 \simeq T_2$：2つのユニタリ表現（UR）T_1, T_2がユニタリ同値．

とくに Gがリー群のとき，

$\mathcal{D}(G) = C_0^\infty(G)$

$\mathfrak{g}$はGのリー環，$\mathfrak{g}'$は$\mathfrak{g}$の双対空間

$\sigma(X) = \mathrm{ad}\,X \quad (X \in \mathfrak{g}),\qquad \sigma(g) = \mathrm{Ad}\,g \quad (g \in G)$

これらの反傾表現として $\mathfrak{g}'$上に

$$\rho(X) = \mathrm{ad}'X \quad (X \in \mathfrak{g}), \qquad \rho(g) = \mathrm{Ad}'g \quad (g \in G).$$

ヒルベルト空間$\mathfrak{H}$に対して$\mathfrak{H}$上の有界，完全連続，Hilbert-Schmidt型（H.-S.型），trace classの線型作用素全体をそれぞれ$\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{N} = \mathfrak{HS}$, $\mathfrak{M} = \mathfrak{T}\mathfrak{C}$と書く．

$$\mathfrak{B} \supset \mathfrak{C} \supset \mathfrak{N} \supset \mathfrak{M}.$$

我々はC^*代数における次の定義を採用する．

<u>定義1.1.</u> $\mathfrak{H}$上の線型作用素Sが<u>trace class</u>であるとはH.-S.型作用素$B_1, B_2, \cdots, B_r$, $C_1, C_2, \cdots, C_r$があって

$S = B_1C_1 + B_2C_2 + \cdots + B_rC_r$ と書けることである．

さて，$\mathfrak{C}$, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{M}$は$\mathfrak{B}$の両側イデアルであり，$\mathfrak{N}$の元の積から生成される部分空間を$\mathfrak{N}^2$とかくと定義により

$\mathfrak{M} = \mathfrak{N}^2$．また$\mathfrak{H}$が可分ならば$\mathfrak{B}$の閉両側イデアルは$\{0\}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{B}$のみである．

<u>命題1.1.</u>

(i) $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$のoperator normに関する閉包はともに$\mathfrak{C}$．

(ii) $\mathfrak{B}^+$を正定値な$\mathfrak{B}$の元全体，$\mathfrak{M}^+ = \mathfrak{M} \cap \mathfrak{B}^+$とすると $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}^+ - \mathfrak{M}^+$．

(iii) $\mathfrak{M} \ni S$となる必要十分条件は$\mathfrak{H}$の一つの完全正規直交基底$\{e_1, e_2, \cdots\}$に対し次式が成立すること．

$$\sum_{i,j} |(Se_i, e_j)| < +\infty.$$

(iv) $\mathfrak{B}^+$, $\mathfrak{M}$の元に対してはtraceが自然に定義でき

るが，$\mathfrak{M}^+ = \mathfrak{M} \cap \mathfrak{B}^+ = \{ S \in \mathfrak{B}^+ ; \mathrm{tr}(S) < +\infty \}$ である．

1.2. $C^*(G)$ の定義

$f_1, f_2 \in L^1(G)$ に対し

$$\|f_1 * f_2\|_1 \leqq \|f_1\|_1 \cdot \|f_2\|_1 , \quad \|f_1^*\|_1 = \|f_1\|_1 ,$$

であるから $L^1(G)$ は involutive Banach algebra であるが
これから次のように C^*代数 $C^*(G)$ を作る．

$$f \in L^1(G), \quad \|f\| = \sup_T \|T(f)\| \leqq \|f\|_1$$

（T は G の IUR 全体を動く）により新しいノルムを定義する．$\|f\| = 0$ ならば $f = 0$ である．$\|\cdot\|$ に関する $L^1(G)$ の完備化を $C^*(G)$ と書けば，これは C^*代数である．そして G の UR，$g \to T(g)$ が，$L^1(G)$ の非退化な $*$-表現 $f \to T(f)$ （$T(f^*) = T(f)^*$）と 1-1 に対応するのと同様に $C^*(G)$ の非退化な $*$-表現とも 1-1 に対応する．

しばらく $A = C^*(G)$ とかく，$A^+ = \{ yy^* ; y \in A \}$ とおけば，${}^\forall x = x^* \in A$ に対し $\exists\, x^+, x^- \in A^+$ で

$$x = x^+ - x^- , \quad x^+ x^- = x^- x^+ = 0 , \quad \|x^\pm\| \leqq \|x\| , \quad \|x^+ + x^-\| = \|x\|$$

となる．

1.3. 既約表現の指標

いま G の IUR，T をとり それを $A = C^*(G)$ の表現と思って C^*代数の一般論を適用する [3(c)]．

$\mathrm{Ker}_A(T) = \{x \in A\ ;\ T(x) = 0\}$ とおく．

<u>命題1.2.</u>

(i) $T(A) \cap \mathcal{C} \neq \{0\}$ ならば $T(A) \supset \mathcal{C}$．

(ii) $T(A) \supset \mathcal{C}$ とする．他のIUR, T' が
$\mathrm{Ker}_A(T) = \mathrm{Ker}_A(T')$ を満せば $T \simeq T'$．

(iii) $T(A) \cap \mathcal{C} = \{0\}$ とすると，$\mathrm{Ker}_A(T) = \mathrm{Ker}_A(T')$ を満し互にユニタリ同値でない IUR, T' が連続濃度存在する．

<u>定義1.2.</u> IUR, T が $T(A) \subset \mathcal{C}$，従って，$T(A) = \mathcal{C}$ を満すとき T を<u>CCR</u> (completely continuous represen.) という．T が $T(A) \supset \mathcal{C}$ を満すとき T は<u>指標(character)を持つ</u>という．G の全ての IUR が CCR のとき，G を<u>CCR</u> という．また G の全ての IUR が指標を持つとき，G を <u>GCR</u> という．

いま，$T(A) \supset \mathcal{C}$ とする．A の両側イデアル $\mathfrak{n}_T$, $\mathfrak{m}_T$ を

$$\mathfrak{n}_T = \{x \in A\ ;\ T(x) \in \mathcal{H} = \mathcal{HS}\},$$
$$\mathfrak{m}_T = \{x \in A\ ;\ T(x) \in \mathcal{M} = \mathcal{TC}\},$$

とおくと，$\mathfrak{m}_T = \mathfrak{n}_T^2$ で $\mathfrak{m}_T$ と $\mathfrak{n}_T$ の閉包は同じである．

<u>定義1.3.</u> T の<u>指標</u> π_T とは $\mathfrak{m}_T \subset A$ 上の次の函数である．

$$\pi_T(x) = \mathrm{tr}\left(T(x)\right) \qquad (x \in \mathfrak{m}_T).$$

また，T の <u>bitrace</u> s_T とは $\mathfrak{m}_T \times \mathfrak{m}_T$ 上の次の函数である．

$$s_T(x, y) = tr(T(y)^* T(x)) \qquad (x, y \in \mathfrak{m}_T).$$

一方，$T(A^+) \subset \mathcal{B}^+$ であるから，A^+ 上で $\pi_T(x) = tr(T(x))$ が定義できるが，$\mathfrak{m}_T^+ = \mathfrak{m}_T \cap A^+$ とおけば

$$\mathfrak{m}_T^+ = \{x \in A^+ \;;\; \pi_T(x) < +\infty\},$$

$$\mathfrak{m}_T = \mathfrak{m}_T^+ - \mathfrak{m}_T^+ + \sqrt{-1}\,(\mathfrak{m}_T^+ - \mathfrak{m}_T^+),$$

であるから，π_T を A^+ 上で考えるのも $\mathfrak{m}_T$ 上で考えるのも同じことである．

<u>命題1.3.</u> T を G の指標を持つ IUR とする．他の IUR T' が $T' \simeq T$ となる必要十分条件は T' も指標を持ち $\pi_{T'} = \pi_T$ となることである．(以上)

簡単に分るように，T が CCR である必要十分条件は $T(L^1(G)) \subset \mathcal{C}$． また，$T$ が指標を持つときは $\overline{T(L^1(G))} \supset \mathcal{C}$ (左辺は operator norm に関する閉包)．

また，次のことが知られている．

(1) 連結半単純リー群 (Harish-Chandra)，連結巾零リー群 (Dixmier[3(b)])，$\mathbb{R}$ 上の線型代数群 (Dixmier) は CCR である．

(2) GCR でない可解リー群が存在する (Mautner)．

(3) 局所コンパクト群 G が可分ならば，

G が GCR $\iff$ G が type I (Glimm)．

しかし，一般には　GCR $\Longrightarrow$ type I.

(4) 局所コンパクト群 G に対し，

IUR, T が CCR $\Longleftrightarrow$ $\hat{G}$ の一点 $[T]$ = T の同値類，が閉．

例1.1. 実直線の変換群：$x \longrightarrow ax+b$

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; a > 0, b \in \mathbb{R} \right\}$$

はGCRであるがCCRでない．無限次元のIURが2個あるが，それらはいずれもCCRでない．

1.4. 既約表現の指標とbitraceの性質

一般のC^*代数Aに対し，A^+上のある種の正値関数としてtraceが定義され，また下の定義1.4のようにbitraceも定義される．この2つの概念はかなりうまく対応している．我々が上で定義した$A=C^*(G)$の既約表現の指標(character)はtraceの特殊なものである．しかも $m_T = m_T^2$ であるから character π_T と bitrace S_T とは互に他を決定する．我々は既約表現しか扱わないのでtrace, bitraceの一般論には立入らず，その範囲で必要な事実を述べる．GのIUR, Tの指標π_Tの性質を直接述べるには種々の用語を準備しなければならないが，それを対応するbitrace S_Tを用いて部分的

にならべることができる。

<u>定義1.4.</u> Aを任意のC^*代数とする。Aの <u>hitrace</u> s とは、次の条件(S1)〜(S5)を満す函数 $s: \mathfrak{n}\times\mathfrak{n}\to\mathbb{C}$ である。ここに、$\mathfrak{n}$ はAの閉とは限らぬ両側イデアルで $\mathfrak{n}=\mathfrak{n}^*$ なるものであり、sの定義イデアルと呼ばれる。

(S1) $s(x,y)$ は x に関し線型、
$s(y,x)=\overline{s(x,y)}$, $s(x,x)\geqq 0$.

(S2) $s(y,x)=s(x^*,y^*)$ $(x,y\in\mathfrak{n})$.

(S3) $s(zx,y)=s(x,z^*y)$ $(x,y\in\mathfrak{n}, z\in A)$.

(S4) $^\forall z\in A$ に対し、$\mathfrak{n}\ni x\mapsto zx\in\mathfrak{n}$ は、$\mathfrak{n}$ の s から決まる pré-Hilbert 空間の構造に関し連続。

(S5) 集合 $\{xy\,;\,x,y\in\mathfrak{n}\}$ は上の構造に関し、$\mathfrak{n}$ で到る処稠密である。

また hitrace s が <u>極大</u> であるとは s の本当の拡張が存在しないことである。

さて、$A=C^*(G)$ とするとき、G の IUR, T の hitrace s_T の定義イデアルは $\mathfrak{n}_T$ であるとする。

<u>命題1.4.</u>

G の IUR, T の hitrace s_T は $A=C^*(G)$ の極大な hitrace である。

1.5, 指標としての測度, 超函数 (distribution)

次の補題が重要である.

補題1.5. A を C^*代数とし, A' を部分代数で $(A')^* = A'$, かつ A で到る処稠密なものとする. $A' \times A'$ 上の複素函数 $s' \neq 0$ が次の条件 $(s'1) \sim (s'5)$ を満せば, s' は A の極大な trace に一意的に拡張できる.

$(s'1)$ $s'(x, y)$ $(x, y \in A')$ は (広義の) 正定値 hermitian form である.

$(s'2)$ $s'(y, x) = s'(x^*, y^*)$ $(x, y \in A')$.

$(s'3)$ $s'(zx, y) = s'(x, z^*y)$ $(x, y, z \in A')$.

$(s'4)$ $s'(zx, zx) \leqslant \|z\|_A^2 \cdot s'(x, x)$ $(x, z \in A')$.

$(s'5)$ 集合 $\{xy\,;\, x, y \in A'\}$ は s' からきまる pré-Hilbert 空間の構造に関し, A' で到る処稠密である.

さて, 我々は $A = C^*(G)$ に対して, $A' = C_0(G)$ または $\mathcal{D}(G)$ ととるのである. いま, G の IUR, T が $A' \subset \mathfrak{M}_T$, すなわち, $T(x)$ H-S.型 $(\forall x \in A')$ を満すとする. すると T は CCR となり従って指標を持つのだが $s' = s_T \,|\, A' \times A'$:

$$s'(x, y) = \mathrm{tr}\left(T(y)^* T(x)\right) \qquad (x, y \in A')$$

は $(s'1) \sim (s'5)$ を満す. 上の補題によれば s_T は s' から一意的にきまる訳で $A' = C_0(G)$ または $\mathcal{D}(G)$ に対し s' が求まれば一応指標 s_T が求まったと言えるのである. 表現論では

普通 $C^*(G)$ までは考えないから S_T よりむしろ S' の方が馴染深い．実際に $(S'4)$ と $(S'5)$ が満されることを示そう．T の表現空間 $\mathcal{H}$ の正規直交基底 $\{e_i\}_{(i\geq 1)}$ をとると，

$$S'(zx,zx)=\sum_{i\geq 1}\|T(z)T(x)e_i\|^2$$
$$\leq \|T(z)\|^2\cdot\sum_i \|T(x)e_i\|^2 \leq \|z\|_A^2\cdot S'(x,x).$$

また，x_v $(v\to e)$ を A' の approximate identity とすると，

$$\forall y\in A';\quad T(x_v y)\to T(y)\quad (v\to e)\quad (\text{強収束}),$$

従って，$v\to e$ のとき

$$S'(x_v y-y,\, x_v y-y)=\sum_i \|(T(x_v y)-T(y))e_i\|^2\to 0.$$

すなわち，内積 S' に関し $x_v y\to y$ $(v\to e)$.

以下この節では，μ によって，局所コンパクト群 G 上の（複素数値 Radon）測度，または リー群 G 上の超函数を表わす．前者の場合 $A'=C_0(G)$，後者の場合 $A'=\mathcal{D}(G)$ とおく．

定義1.5. G 上の Radon 測度 または 超函数 μ が 不変 であるとは
$$\mu(f^{g_0})=\mu(f)\quad(\forall g_0\in G,\ f\in A')$$
を満すことであり，μ が 正定値 であるとは，

$$(*)\qquad \mu(\tilde{f}*f)=(\Delta^{1/2}\mu)\big((\Delta^{-\frac12}f)^{*}*(\Delta^{-\frac12}f)\big)\geq 0\quad(\forall f\in A')$$

を満すことである．ここに，

$$f^{g_0}(g)=\Delta(g_0)f(g_0 g g_0^{-1}),\quad \tilde{f}(g)=\overline{f(g^{-1})},\quad f^{*}(g)=\Delta(g^{-1})\overline{f(g^{-1})}.$$

また，$\tilde{f}*f=\Delta^{\frac12}\cdot(\Delta^{-\frac12}f)^{*}*(\Delta^{-\frac12}f)$ であるから，$(*)$ は

$$(**)\qquad (\Delta^{\frac12}\mu)(f^{*}*f)\geq 0\qquad(\forall f\in A'),$$

と同値である．G上の函数 $\varphi(g)$ と測度 $\varphi(g)dg$ を同一視する．連続函数 φ が <u>正定値</u> であるとは，いつもの如く，

$$\sum_{1\leq i,j\leq n} \varphi(g_i g_j^{-1}) z_i \overline{z_j} \geqq 0 \quad (z_i \in \mathbb{C})$$

ということとする．これは測度 $\varphi(g)\Delta^{-\frac{1}{2}}(g)dg$ が正定値であることと同値である．すなわち，$\int_G (f^* * f)(g)\varphi(g)dg \geqq 0$ $({}^\forall f \in A')$．さらに，φ が内部自己同型で不変であれば $\varphi(g)\Delta^{-\frac{1}{2}}(g)dg$ は不変である．

<u>注意1.1.</u> 右不変測度 dg を d_rg，左不変測度 $\Delta(g^{-1})dg$ を d_lg と書き，　$d_r(g_0g) = \Delta_r(g_0)d_rg$，$d_l(gg_0) = \Delta_l(g_0)d_lg$ とおくと　$\Delta_r(g_0) = \Delta_l(g_0)^{-1} = \Delta(g_0)$．上の定義によれば，

$$\Delta_r^{-\frac{1}{2}}(g)d_rg = \Delta_l^{-\frac{1}{2}}(g)d_lg \quad \left(= \Delta^{-\frac{1}{2}}(g)dg\right)$$

は正定値であるが，d_rg，d_lg は正定値ではない．我々はG上の測度 $\Delta^{-\frac{1}{2}}(g)dg$ を左右に偏向していないという意味で標準にとろうという訳である．

<u>命題1.6.</u> $A = C^*(G)$ とし，μ を G上の測度または超函数，対応して $A' = C_0(G)$ または $\mathcal{D}(G)$ とする．

$$\begin{aligned} S^\mu(f_1, f_2) &\overset{\mathrm{def}}{=} (\Delta^{\frac{1}{2}}\mu)(f_2^* * f_1) \\ &= \mu\left((\Delta^{\frac{1}{2}}f_2)^\sim * (\Delta^{\frac{1}{2}}f_1)\right) \quad (f_1, f_2 \in A'), \end{aligned}$$

が補題1.5の条件(S'1)〜(S'5)を充すための必要十分条件は μ が不変正定値であることである．

従って μ が不変正定値のとき，$A' \times A'$ 上の S^μ は A の

極大な hi-trace に一意的に拡張される訳だが，それをまた S^μ と書く．

<u>定義1.6.</u> G の IUR, T の指標が測度または超函数 μ であるとは，T が指標をもち，かつ，$S_T = S^\mu$ となっていることである．

<u>命題1.7.</u> G の IUR, T の指標が測度（または超函数）μ であるための必要十分条件は

1) ${}^\forall f \in C_0(G)$（または $\mathcal{D}(G)$），$T(f)$ は H.-S. 型．
すなわち $C_0(G)$（または $\mathcal{D}(G)$）$\subset \mathfrak{n}_T$．

2) $$\pi_T(f_2^* * f_1) = \mathrm{tr}\left(T(f_2^* * f_1)\right) = \mathrm{tr}\left(T(f_2)^* T(f_1)\right)$$
$$= (\Delta^{\frac{1}{2}}\mu)(f_2^* * f_1) \quad (f_1, f_2 \in C_0(G) \text{ または } \mathcal{D}(G)).$$

<u>注意1.2.</u> 上の 2) からも分るように，我々は標準的測度として $\Delta^{\frac{1}{2}}(g)dg$ をとっている訳である．また，T の指標が測度または超函数であれば，1) から分るように $T(L^1(G)) \subset \mathcal{C}$ となり T は CCR でなければならない．

<u>注意1.3.</u> T の指標が μ であるとは，$C_0(G)$ または $\mathcal{D}(G)$ が $\subset \mathfrak{n}_T$ (i.e. $T(f)$ H.-S. 型) ではあるが，$\subset \mathfrak{m}_T$ (i.e. $T(f)$ trace class) までは要求していないのである．しかし，連結な半単純または中零リー群 G に於ては ${}^\forall$IUR, T の指標は，上の意味で超函数 μ であるのみならず，さらに，
$$\mathcal{D}(G) \subset \mathfrak{m}_T, \text{ かつ, } \pi_T(f) = \mathrm{tr}\, T(f) = \mu(f) \quad ({}^\forall f \in \mathcal{D}(G)),$$

ともなっている($\Delta\equiv 1$). 一方, Pukanszkyの結果を見れば Exponential Lie group に対してさえ, $\mathcal{D}(G)\subset \mathfrak{M}_T$ とは限らず, 定義1.6, 命題1.7により hitrace を経て指標 π_T と超函数 μ をつなぐということは本質をつかんでいる如く思われる.

1.6. 指標と reduced dual

局所コンパクト群 G に対し, その(右)正則表現 $\mathcal{R}$ の $\hat{G}$ での台を G の reduced dual といい $\hat{G}_r$ と書く. すなわち, G の IUR, T の同値類を $[T]$ と書けば,

$$\hat{G}_r=\{[T]\in\hat{G}\ ;\ T \text{ is weakly contained in } \mathcal{R}\}.$$

G を可分ユニモジュラー(i.e., $\Delta\equiv 1$)とすると, $\mathcal{R}$ を factor 表現に分解して, いわゆる Plancherel の公式が成立する(F. I. Mautner, I. E. Segal). とくに G が I型ならば, Plancherel 測度 μ_0 は $\hat{G}_r$ 上に乗っていて, $^\forall f\in L^1(G)\cap L^2(G)$,

$$\int_G |f(g)|^2\,dg=\int_{\hat{G}_r} tr\left(T(f)^*T(f)\right)d\mu_0([T])=\int_{\hat{G}_r}\pi_T(f^* * f)\,d\mu_0([T]).$$

この公式は次の命題を踏まえている.

<u>命題1.8.</u> G を I型可分ユニモジュラー群とすると, μ_0 に関しほとんど全ての $[T]\in\hat{G}_r$ に対し,

$$L^1(G)\cap L^2(G)\subset \mathfrak{N}_T \quad (\text{すなわち}, T(f)\ \text{H.-S.型}).$$

かかる T に対しては, 前述のように, hitrace S_T のかわりに,

$s' = S_T \mid C_0(G) \times C_0(G)$, を考えれば十分な訳である。

一方，最近辰馬氏はPlancherelの公式を可分非ユニモジュラーGに拡張した[13]。それをI型の場合に制限すると次のことが分る(*)。$H = \{g \in G ; \Delta(g) = 1\}$ とおく。まず，"殆ど"全ての $[T] \in \hat{G}_r$ は，HのIUR $(L, \mathcal{H}^L)$ の誘導表現として $T = \operatorname*{Ind}_{H \uparrow G} L$ と表わされる。§§4-6でも必要なので誘導表現の作り方をここで述べる。$H \backslash G$ 上の quasi-invariant な測度 ν を一つ固定し，$d\nu(y g_0) = m(y, g_0)\, d\nu(y)$ $(y \in H \backslash G)$ とおく。Tの表現空間 $\mathcal{H}$ は G上の可測 $\mathcal{H}^L$-値函数 φ で

$$\varphi(hg) = L_h \varphi(g) \quad (\forall h \in H,\ \text{a.a. } g \in G),$$
$$\int_{H \backslash G} \|\varphi(\dot{g})\|^2_{\mathcal{H}^L}\, d\nu(\dot{g}) < +\infty \qquad (\dot{g} = Hg).$$

を充すもの全体である。そして，

$$T(g_0)\varphi(y) = m^{\frac{1}{2}}(y, g_0)\, \varphi(y g_0).$$

さて，$\mathcal{H}$ 上の非有界作用素 $T_{\Delta^{1/2}}$ を

$$(T_{\Delta^{1/2}} \varphi)(g) \overset{\text{def}}{=} \Delta^{1/2}(g)\, \varphi(g)$$

とおくと，Plancherelの公式は次のようになる。

$$\int_G |f(g)|^2 dg = \int_{\hat{G}_r} \operatorname{tr}\left[(T_{\Delta^{1/2}} T(f))^* (T_{\Delta^{1/2}} T(f)) \right] d\mu_0([T])$$
$$(\forall f \in C_0(G)).$$

そして，この公式は次の命題を踏まえている。

命題1.9 [13]. GをI型，可分，非ユニモジュラーとする。殆ど全ての $[T] \in \hat{G}_r$ は $H = \{g \in G ; \Delta(g) = 1\}$ からの誘導表

(*) Gは自然に $\hat{H}_r$ に働くが，そのG-軌道の空間が，G. W. Mackeyの意味で countably separated であることが仮定されている。しかしこの仮定は不要であろうと辰馬氏は言っている。

現として得られ，また，

$$T_{\Delta^{1/2}}T(f) \quad \text{H.-S. 型} \quad (\forall f \in C_0(G)).$$

いま，Gを上の命題と同じとする．GはGCRになるので全ての$[T]\in\hat{G}$は指標を持つ．しかし，そこには必然的に$C^*(G)$を持ち出さなくてはならない．何故なら，$C_0(G)\subset \mathfrak{A}_T$とは限らないので hitrace S_Tから $S'=S_T|C_0(G)\times C_0(G)$，に移る訳にはいかないからである．しかし，上の辰馬氏の結果によれば，少なくとも，殆ど全ての$[T]\in\hat{G}_r$に対しては，

$$S''(f_1,f_2)=tr[(T_{\Delta^{1/2}}T(f_2))^*(T_{\Delta^{1/2}}T(f_1))] \quad (f_1,f_2\in C_0(G))$$

が定義できる．

問題1.1. S''を特徴付ける性質は何か？ またS_TはS''から一意的に決まるのであろうか？

なお，$\hat{G}_r$に関し次のことが知られている．

命題1.10.

(i) Gを局所コンパクト群とする．

$$\hat{G}=\hat{G}_r \iff \hat{G}_r\ni 1 \quad (1\text{は trivial 表現}).$$

(ii) Gを連結実リー群とする．RをGのradicalとしたとき，

$$G/R \text{ コンパクト} \Longrightarrow \hat{G}=\hat{G}_r$$

例えば，連結巾零リー群に対しては，$\hat{G}=\hat{G}_r$である．

§2. 半単純リー群の指標(現状)

Gを連結実半単純リー群とする．Gの IUR，Tはつねに $\mathcal{D}(G) \subset \mathcal{M}_T$ となるばかりでなく，$\mathcal{D}(G) \ni f \longmapsto \pi_T(f) = \mathrm{tr}(T(f))$ は超函数である．さらに，ユニタリでない位相的既約表現 $(T, \mathcal{H})$ が quasi-simple ならば同じことが成立する．いま，Z_GをGの中心，$\mathfrak{Z}$をGのラプラス作用素全体のなす環とする．$\mathcal{H}^0$を $T(f)v$ $(f \in \mathcal{D}(G),\ v \in \mathcal{H})$ で張られる部分空間 (Gårding subspace) とする．

定義 2.1. Gの位相的既約表現 $(T, \mathcal{H})$ が quasi-simple であるとは (記号：QSIR) とは，Z_G から $\mathbb{C}^\times$ への準同型 χ，$\mathfrak{Z}$ から $\mathbb{C}$ への準同型 λ があって

$$T(z) = \chi(z) 1_{\mathcal{H}} \quad (z \in Z_G), \quad T(Z)|_{\mathcal{H}^0} = \lambda(Z) 1_{\mathcal{H}^0} \quad (Z \in \mathfrak{Z}),$$

を満すことである．(χ，λをTの central, infinitesimal character という．)

Tを QSIR とすれば，$\pi_T \in \mathcal{D}'(G)$ は内部自己同型で不変で

$$Z \pi_T = \lambda(Z) \pi_T \quad ({}^\forall Z \in \mathfrak{Z})$$

を満す．すなわち，π_TはG上の不変固有超函数である．さらに，π_TはGの正則元全体G'上で実解析的な局所可積分函数と一致する (Harish-Chandra).

さて，$G = KAN$を岩沢分解とする．Kの有限次元既約表現の同値類をδで表わし，$\mathcal{H}(\delta)$を $T|_K$ の下でδに従って

変換されるベクトルの全体とする．任意のQSIR，Tに対して，

$$\dim \mathcal{H}(\delta) \leqslant N(\dim \delta)^2 \quad (\forall \delta,\ \exists N \text{は定数})$$

となる．一方，新屋氏の結果[12]によれば，位相的既約表現$(T, \mathcal{H})$に対し，Gが忠実な有限次元表現を持つとき，

$$(\exists \delta_0)\ 0 < \dim \mathcal{H}(\delta_0) < +\infty \implies (\forall \delta)\ \dim \mathcal{H}(\delta) \leqslant (\dim \delta)^2$$

となる，これから次のことが証明される．

命題2.1. 位相的既約表現$(T, \mathcal{H})$に対し（Gが上の条件を満すとき），

$$T\text{が quasi-simple} \iff (\exists \delta_0)\ 0 < \dim \mathcal{H}(\delta_0) < +\infty.$$

GのQSIR，Tの指標について詳しくは論説[7(e)]を見ていただくことにして，ここでは，現在まで指標を求めるのにどういう方法が用いられて来たかについて簡単に述べる．

第一の方法．Gのある閉部分群Pをとり，その既約表現Lを誘導してGの既約表現Tを作る．そしてTの指標π_TをLの指標π_Lを用いて書き表わす．この方法での問題は次の3つである．(イ) $\mathrm{Ind}_{P\uparrow G} L = T^L$の既約性の証明，(ロ) π_Tをπ_Lで書き表わす公式を作ること（[7(c)], [10] 参照），(ハ) できるだけ沢山のTを誘導表現の形で実現すること．

第二の方法．$G=KAN$と岩沢分解し，MをAのKにおける中心化群，$B=MAN$とおく．Bの有限次元既約表現LをGへ誘導した表現T^Lを elementary representation（記号：ER）という．T^Lは殆どのLに対し既約だが，可約でも，

高々有限個の既約成分しか持たず，それら既約成分は全て共通の central, infinitesimal character (χ, λ) を有するQSIRである．また (χ, λ) を一組きめればそれを有するQSIRは(infinitesimal equivalence を除いて)有限個 $T_1, T_2, \cdots, T_r$ しかない．指標は上の同値性による同値類に対してきまるのである．
そこで，$\pi_i = \pi_{T_i}$ とし，T^L の既約成分として T_i の表れる重複度 $m_i = [T^L : T_i]$ が決定できたとすれば，次の等式を得る．

(2.1) $\quad m_1\pi_1 + m_2\pi_2 + \cdots + m_r\pi_r = \pi_{T^L}$.

同じ (χ, λ) を有する T^L は有限個あるので，(2.1)により，$\pi_1, \cdots, \pi_r$ の連立一次方程式系を得る．

この方程式系は一般には過小決定系である．とくに G が複素半単純ならば完全決定系であることが Zhelobenko の "minimal representations" に関する結果から分る([D(f)]参照)．また $SO_0(n,1)$, $SU(n,1)$ に対しては，離散系列の表現(=乗可積分なIUR)の指標を別個に求め，さらに有限次元表現のWeylの指標公式を用いることによって連立方程式(2.1)が解ける．かくて，$SO_0(n,1)$ の全ての，$SU(n,1)$ のほとんど全てのQSIRの指標が得られる[7(a), (b)]．

G がある条件を充せば(とくに G が忠実な表現を持てば)任意のQSIRはあるER, T^L の既約成分に infinitesimally equivalent である．これは連立方程式(2.1)の有効性を意味する．

この方法の重要な段階は，

(イ) (χ, λ)を与えたとき，$T_1, \cdots, T_r$を同定し，重複度 $m_i = [T^L : T_i]$ を求めること．

(ロ) 得られた連立方程式(2.1)が過小決定系であるとき，他の情報を求めること（離散系列の表現の指標など）．

第三の方法． QSIR, Tの指標を特別な不変固有超函数として特徴付け，それを具体的に計算する．例えば，離散系列の表現の指標は，Harish-Chandraにより，G上の緩増大不変固有超函数であって，GのコンパクトCartan部分群上である特定の形を持つものとして特徴付けられた．この超函数は局所可積分な函数であるが，Gの他のCartan部分群上での具体的な形を求める方法は[7(e)]に与えられている．$Sp(2, \mathbb{R})$ (rank 2)に対して計算した結果[7(e)]を見ても分るように，その形はWeylの指標公式の如く簡明ではない．また，この方法と第一の方法とを組合せると，Gの中心Z_Gが有限のとき，Gの主系列のIUR（すなわち，$\hat{G}_r$に属する表現）の殆ど全ての指標を計算することができる筈である．

その他の方法(1)． Atyah-Bott は elliptic complex に対する Lefschetz fixed point formula をコンパクト半単純リー群の表現に応用して，Weylの指標公式を得た[1]．この方法は見掛け上 第二の方法に似ている．すなわち，問題の

IUR, T_1を何個かの無限次元表現の中に埋め込み, (2,1)と類似の連立一次方程式を得る. Hopfの跡定理を用いて, $\pi_2, \cdots, \pi_r$を消去することができるのでT_1の指標π_1が求まる. さて, これをコンパクトでない半単純リー群Gへ拡張しようとするとき直ちに行き当る困難は次のことである. GのIUR, Tを部分群Pの表現Lを"誘導"して作ったとすると"fixed points"としてとらえられるのはgPg^{-1} $(g \in G)$の合併集合Eの元であろう. ところがTの指標π_TはEの外にも乗っており, そこでは"Lefschetz fixed point formula"からだけではπ_Tは計算できないのではなかろうか?

その他の方法(2). A.A. Kirillov, E.A. Gutkin, M. Duflo等によるいわゆる指標の積分表示(§§3, 8, 9参照). これも特殊な目的で特殊なIURを取扱うには有効であろうが, 一般には§9で述べるように方法としてある限界を内包しているのではないか? これはまた指標を函数として求めるという方向とは別のものであり, 特に長所があるかどうか検討すべき問題である. Hyperfunctionの理論がここに応用できるのではないかという意見もある.

本論　リー群の指標の積分表示

§3. "Method of Orbits", とくに指標の積分表示について.

3.1. Gを連結リー群, $\mathfrak{g}$をそのリー環, $\mathfrak{g}'$を$\mathfrak{g}$の双対空間とする. 随伴表現とその反傾をそれぞれσ, ρと書く. $\rho(G)$による$\mathfrak{g}'$の軌道全体の空間を$\hat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}'/\rho(G)$とかく. $f \in \mathfrak{g}'$を通る軌道を$O_f = \rho(G)f$とかく. J. Dixmier や A.A. Kirillov による連結巾零リー群Gの表現論には軌道や軌道空間$\hat{\mathfrak{g}}$が重要な役割を果している. 要約すればGのIUR と軌道とは次の3つの側面で関連している[8(a)].

(A) 既約表現(IUR)の構成に軌道が用いられる. それにより$\hat{\mathfrak{g}}$から$\hat{G}$への全単射がえられる.

(B) 既約表現の指標を対応する軌道上の不変測度のFourier変換を用いて表示できる(指標の積分表示).

(C) 殆ど全ての既約表現(次元が最大の軌道に対応するもの)はその infinitesimal character で特徴付けられるがまたこの inf. character は対応する軌道をも特徴付ける([8(a), §2, Prop. 1]参照).

さてこの小文では主として(B)項の結果を概観する. それに必要な範囲で(A)項についても触れる. この(A)項に関しては一般論として Kostant [9(a), (b)], I型可解群に対する実現

としてAuslander-Kostant[2]を参照されたい。

3.2. 指標の積分表示とは何かを述べよう。軌道 $O \subset \mathfrak{g}'$ と O 上の G-不変測度 $d\nu$ をとる。$d\nu$ を $\mathfrak{g}'$ 上の超函数とみなして、そのFourier変換

(3.1) $$\mathcal{F}(d\nu) = \int_O e^{i(X,f)} d\nu(f)$$

を考える。すなわち、$\phi \in \mathcal{D}(\mathfrak{g})$ に対し、

(3.2) $$\hat{\phi}(f) = \int_{\mathfrak{g}} e^{i(X,f)} \phi(X) dX \quad (f \in \mathfrak{g}')$$

(dX は $\mathfrak{g}$ 上のルベーグ測度)とおくと、

(3.3) $$\langle \mathcal{F}(d\nu), \phi \rangle = \langle d\nu, \hat{\phi} \rangle.$$

いま $\varphi \in \mathcal{D}(G)$ をとる。

(3.4) $$\varphi'(X) = \varphi(\exp X) \quad (X \in \mathfrak{g}),$$

により $\varphi' \in C^\infty(\mathfrak{g})$ をうるが、$\mathrm{supp}\,\varphi$, $\mathrm{supp}\,\varphi'$ に条件を付けることにより $\varphi' \in \mathcal{D}(\mathfrak{g})$ となり φ と φ' が1-1対応をするとき φ と φ' を同一視して $\varphi \in \mathcal{D}(\mathfrak{g})$ とも考える。$[T] \in \hat{G}$ に対し、$\varphi \in \mathcal{D}(G)$ のある族 Φ があって、

(3.5) $$\begin{aligned}\pi_T(\varphi) = \mathrm{tr}(T(\varphi)) &= \langle \mathcal{F}(d\nu), \Delta^{\frac{1}{2}}(\exp X) p(X) \varphi(X) \rangle \\ &= \langle d\nu, (\Delta^{\frac{1}{2}} p \cdot \varphi)^\wedge \rangle \quad (\forall \varphi \in \Phi),\end{aligned}$$

となるとき、

(3.6) $$\Delta^{\frac{1}{2}} p \cdot \mathcal{F}(d\nu) = \Delta^{\frac{1}{2}}(\exp X) p(X) \int_O e^{i(X,f)} d\nu(f)$$

を族 Φ に対する指標 π_T の積分表示という。ここに Δ は G

のmodular函数，$\rho(X) \in C^{\infty}(\mathfrak{g})$ で $\rho(0)=1$ と規格化しておく．

注意3.1．上で $\Delta^{1/2}(\exp X)$ をことさらくくり出したのは命題1.6，1.7を考慮にのことである．また $\Phi \supset \{\varphi^* * \varphi \,;\, \varphi \in \mathcal{D}(G)\}$ ならば，補題1.5（$A'=\mathcal{D}(G)$）により積分表示(3.6)は指標π_Tを完全に決定している．従って指標π_Tが求まったと言える．

3.3．今後いつも現れるO上の標準的G-不変測度について述べる．$f \in O$に対し表現ρの下でのfの固定群をG_f，そのリー環を$\mathfrak{g}_f$と書く．

(3.7) $\qquad B_f(X, Y) = ([X, Y], f) \qquad (X, Y \in \mathfrak{g})$

により$\mathfrak{g}$上の2次交代形式を得る．一方，

(3.8) $\qquad \alpha_f(g) = \rho(g) f \quad (g \in G)$

は写像 $\alpha_f : G \longrightarrow O$ を与え，これから $d\alpha_f : \mathfrak{g} \to T_f(O)$（核 $\mathfrak{g}_f$）を得る．そして，

(3.9) $\qquad d\alpha_f(\omega_f) = B_f$

を満す$T_f(O)$上の2次交代形式ω_fが一意的にきまる．実はω_fはつねに非縮退である[9(a)]．従って $\dim O = 2k$ はつねに偶数である．こうして得られたO上のG-不変2次微分形式ωのk個の外積 $\overset{k}{\wedge}\omega \neq 0$ はO上のG-不変な最高次微分形式を与える．これはO上のG-不変測度を与え，他のG-不変測度はこれの正定数倍である．

G上の右不変測度 dg の $\mathfrak{g}$ 上の測度 dX による Radon-Nykodim の微分は
$$\frac{d(\exp X)}{dX} = \mathrm{const.}\left|\det\left(\frac{e^{\mathrm{ad}X}-1}{\mathrm{ad}X}\right)\right|.$$
次のような標準的な dv がしばしば表れる（$2k=\dim O$）.

(3.10) $$dv = \left(\frac{d(\exp X)}{dX}\Big|_{X=0}\right)\cdot\frac{1}{k!(4\pi)^k}\cdot\overset{k}{\wedge}\omega$$

この式は L. Pukanszky の論文 [11(b),(d),(e)] に表れる．また A.A. Kirillov [8(b),(c),(d)], E.A. Gutkin [5], M. Duflo [4] では上と 2^k だけ異なる次の

(3.11) $$dv = \left(\frac{d(\exp X)}{dX}\Big|_{X=0}\right)\cdot\frac{1}{k!(2\pi)^k}\cdot\overset{k}{\wedge}\omega$$

が表れる．巾零群，Exponential Lie group (ELG) 等では両者は矛盾しているが，この小文では証明のある Pukanszky に依る．なお [8(b),(c)] はかなりの誤を含むので注意を要する．従って，その分の証明のはっきりせぬ主張は割愛した．

§4. 巾零リー群の表現の構成と指標

この§では，G を連結，単連結巾零リー群とする．このとき $\exp: \mathfrak{g} \to G$ は $\mathfrak{g}$ と G の解析的同型を与える．この同型により急減少の函数の空間 $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$ に対応するものとして $\mathcal{S}(G)$ を定義する．

(A) 既約表現の構成（Dixmir, Kirillov[8(a)]）．$f\in\mathfrak{g}'$ の固定群を G_f，その リー環を $\mathfrak{g}_f$，$O_f=\rho(G)f$ とおく．$\mathfrak{g}$ の部分

環 $\mathfrak{h}$ が f に従属している（記号：$\mathfrak{h} < f$）とは $f([\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]) = 0$（記号：$f \perp [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]$）ということである．$H$ を $\mathfrak{h}$ に対応する G の解析的部分群とする．$H = \exp \mathfrak{h}$，かつ，閉である．H のユニタリ指標 χ_f を

(4.1) $$\chi_f(\exp X) = e^{i(X, f)} \quad (X \in \mathfrak{h})$$

により定義する．χ_f を H から G へ §1.6 の如く誘導した G の表現を $\mathrm{ind}(f, \mathfrak{h})$ とかく．すなわち，

(4.2) $$\mathrm{ind}(f, \mathfrak{h}) = \operatorname*{Ind}_{H \uparrow G} \chi_f \quad .$$

<u>命題4.1</u>（Kirillov [8(a)]）．

(i) $\mathrm{ind}(f, \mathfrak{h})$ が既約 $\Longleftrightarrow$ $\mathfrak{h}$ が $\mathfrak{h} < f$ なる極大部分環．

(ii) ${}^{\forall} f \in \mathfrak{g}'$ に対し $\mathfrak{h} < f$ なる極大部分代数がある．

(iii) $\mathrm{ind}(f_1, \mathfrak{h}_1)$，$\mathrm{ind}(f_2, \mathfrak{h}_2)$ をともに既約とする．

$\mathrm{ind}(f_1, \mathfrak{h}_1) \simeq \mathrm{ind}(f_2, \mathfrak{h}_2)$（ユニタリ同値）$\Longleftrightarrow$ $\mathcal{O}_{f_1} = \mathcal{O}_{f_2}$．

(iv) G の任意の IUR にユニタリ同値な $\mathrm{ind}(f, \mathfrak{h})$ がある．

(v) $\mathcal{O}_f \longmapsto \mathrm{ind}(f, \mathfrak{h})$ により定義される全単射

(4.3) $$\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}'/\rho(G) \longrightarrow \hat{G}$$

は $\tilde{\mathfrak{g}}$ の商位相と $\hat{G}$ の hull-kernel topology に関し連続．

また，次のことが知られている

<u>命題4.2．</u>

(i) ${}^{\forall} f \in \mathfrak{g}'$ に対し，G_f 連結，$\mathcal{O}_f$ 単連結かつ閉（さらに Zariski 閉でもある）．

(ii) $^\forall$IUR, T は CCR, 従って G は CCR.

注意4.1. ちくf が極大ということと次式が同値である.

$$\dim \mathfrak{h} = \dim \mathfrak{g} - \frac{1}{2}\dim O_f = \frac{1}{2}(\dim \mathfrak{g} + \dim \mathfrak{g}_f).$$

(B) 指標の積分表示 (Kirillov [8(a)], Pukanszky [11(b)]).

T を G の任意の IUR とする. 上の意味で $[T] \in \hat{G}$ に対応する軌道 $O \subset \mathfrak{g}'$ をとる.

命題4.3.

(i) $\mathfrak{m}_T \supset \mathcal{S}(G)$, すなわち, $(^\forall\varphi \in \mathcal{S}(G))$ $T(\varphi)$ trace class.

そして, $\mathcal{S}(G) \ni \varphi \longmapsto \pi_T(\varphi) = \mathrm{tr}(T(\varphi))$ は緩増大超函数[3(b)].

(ii) O 上の G-不変測度 $d\nu$ は緩増大 (tempered) であって,

$$\pi_T(\varphi) = \mathrm{tr}(T(\varphi)) = \int_O \hat{\varphi}(f)\, d\nu(f) \quad (^\forall \varphi \in \mathcal{S}(G)). \tag{4.5}$$

ここで右辺の積分は絶対収束であり, $\varphi(\exp X)$ を $\varphi(X)$ とかけば

$$\hat{\varphi}(f) = \int_{\mathfrak{g}} \varphi(X)\, e^{i(X,f)}\, dX. \tag{4.6}$$

記号で書くと $\pi_T = \mathcal{F}(d\nu) \in \mathcal{S}'(G)$. ([8(a)], Th.7.4.)

(iii) 測度 $d\nu$ は (3.10) で与えられる [11(b)].

(Kirillov は (3.11) で与えられるという [8(b)].)

§5. Exponential Lie group (ELG) の表現の構成と指標

リー群 G が exponential であるとは, $\exp: \mathfrak{g} \to G$ が微分同型を与えることである. G が ELG であるための必要

十分条件は次の 1) 2) である.

$$(5.1)\ \begin{cases} 1)\ G\ \text{が単連結}. \\ 2)\ \mathrm{ad}(X)\ (\forall X\in\mathfrak{g})\ \text{が純虚数固有値を持たない}. \end{cases}$$

このとき G は可解である.

一般に可解リー環 $\mathfrak{g}$ の root とは $\mathfrak{g}_c$ の随伴表現の既約成分として表れる $\mathfrak{g}_c'$ の元のことである. $\mathfrak{g}$ が巾零ならば root は 0 だけである. 条件 (5.1) は次のようにも書ける.

$$(5.2)\ \begin{cases} 1)\ G\ \text{は可解単連結}. \\ 2)\ \mathfrak{g}\ \text{の}\ \forall\text{root は}\ (1+\sqrt{-1}\,a)\gamma\ (\exists a\in\mathbb{R},\ \exists\gamma\in\mathfrak{g}')\ \text{の形}. \end{cases}$$

(A) <u>既約表現の構成</u> (P. Bernat, L. Pukanszky [11(c)]).

$f\in\mathfrak{g}'$ をとる. $\mathfrak{h}<f$ なる部分環に対応する解析的部分群 H は閉で $H=\exp\mathfrak{h}$. H の指標 χ_f, その G への誘導表現 $\mathrm{ind}(f,\mathfrak{h})$ を (4.1), (4.2) で定義する. $\rho(G)f=O_f$, $\mathfrak{h}^\perp=\{f_1\in\mathfrak{g}';\ f_1(\mathfrak{h})=0\}$ とおく.

<u>命題 5.1</u> (Pukanszky [11(c)]).

(i) $\mathrm{ind}(f,\mathfrak{h})$ 既約 $\Longleftrightarrow \begin{cases} 1)\ \mathfrak{h}\ \text{が}\ \mathfrak{h}<f\ \text{なる極大部分環}. \\ 2)\ f+\mathfrak{h}^\perp\subset O_f \end{cases}$

(ii) $\forall f\in\mathfrak{g}'$ に対し上の 1) 2) を満す $\mathfrak{h}$ が存在する.

(iii) (iv) (v) : 命題 4.1 の (iii) (iv) (v) に同じ.

命題5.2.

(i) $\forall f \in \mathfrak{g}'$ に対し, G_f 連結, O_f は連結だが閉とは限らぬ.

(ii) IUR, $\mathrm{ind}(f, \mathfrak{h})$ が CCR ならば, O_f は閉である. とくに $\mathfrak{g}$ が代数的(すなわち, ある線型代数群のリー環)ならば逆も正しい.

注意5.1. (イ) 命題5.1の条件1) 2) は "$f + \mathfrak{h}^{\perp} = \rho(H)f$" と同値である. (ロ) $O_f = \rho(G)f$ が閉のとき, 条件1) $\Rightarrow$ 2). また, つねに 条件1) $\Rightarrow$ 2) であるためには $\mathfrak{g}$ が quasi-nilpotent (すなわち, 全ての実の root が 0) であることが必要十分である. とくに $\mathfrak{g}$ が巾零ならば, 条件1) $\Rightarrow$ 条件2).

(B) 指標の積分表示 (Pukanszky [11(d)]).

一般に, $\mathbb{R}$ 上のリー環 $\mathfrak{g}$ が代数的であることと $\mathrm{ad}\,\mathfrak{g}$ が代数的であることは同値である (M. Goto). とくに $\mathfrak{g}$ が可解ならば, $\mathfrak{g}$ に対応する連結かつ単連結な群 G が, ある実線型代数群の単位元の連結成分の普遍被覆群であることと同値になる. このとき G は I 型となり 従って GCR である. Pukanszky は Exp. Lie gr. G の指標を求めるとき次の仮定を置いた.

仮定 $\begin{cases} 1)\ \mathfrak{g} \text{ は代数的である.} \\ 2)\ \text{IUR, } T \text{ に対応する軌道 } O \subset \mathfrak{g}' \text{ は閉である.} \end{cases}$

仮定1) の下で仮定2) は T が CCR ということと同値である.

命題5.3 [11(d)]. 上の仮定の下で，

(i) $\mathfrak{N}_T \supset \mathcal{D}(G)$, すなわち，$({}^{\forall}\varphi\in\mathcal{D}(G))$ $T(\varphi)$ は H.-S. 型.

(ii) O上の不変測度 $d\nu$ は緩増大であって，$\mathcal{D}(G)$の部分集合 $\Phi=\{\varphi^* * \varphi\,;\,\varphi\in\mathcal{D}(G)\}$ に対し，

$$(5.3)\quad \pi_T(\varphi^* * \varphi) = tr\left(T(\varphi^* * \varphi)\right) = \int_O \hat{\Psi}(f)\, d\nu(f).$$

ここに，

$$(5.4)\quad \begin{cases} \Psi(X) = \Delta^{\frac{1}{2}}(\exp X)\cdot P_O(X)\cdot(\varphi^* * \varphi)(\exp X) \\ P_O(X) = \prod_{\alpha\in J_O} \dfrac{e^{\frac{1}{2}\alpha(X)} - e^{-\frac{1}{2}\alpha(X)}}{\alpha(X)} \end{cases}$$

J_O は軌道 O によってきまる $\mathfrak{g}$ の root の集合であり，右辺の積分は絶対収束，すなわち，族 $\Phi\subset\mathcal{D}(G)$ に対する次の積分表示が成立する：$\pi_T = \Delta^{\frac{1}{2}}\cdot\mu$, $\mu = P_O(X)\cdot\mathcal{F}(d\nu)\in\mathcal{D}'(\mathfrak{g})$.

(iii) $d\nu$ は (3.10) で与えられる.（Kirillov は (3.11) だという [8(d)].）

なお，§3.3 で注意したように積分表示(5.3)，(5.4)は指標 π_T を完全に決定する.

例5.1. 例1.1 の $ax+b$ の群 G は上の仮定1) を充す. $\hat{G}$には2個の無限次元表現 T_+, T_- があり，その他は1次元表現である. $T_\pm$ に対応する軌道 $O_\pm\subset\mathfrak{g}'$ はいずれも開であり，閉ではない. 従って $T_\pm$ は CCR でない（問題1.1 参照）.

§6. 可解リー群の表現の構成と指標

しばらく G を任意の単連結リー群とする. 一般に $f\in\mathfrak{g}'$ の

固定群G_fは連結とは限らない。G_f^0をG_fの単位元の連結成分とし，$\mathcal{O}_f=\rho(G)f=G/G_f$とすると$\pi_1(\mathcal{O}_f)\cong G_f/G_f^0$となる。$G_f$の(ユニタリ)指標$\eta_f$でその微分$\delta\eta_f$が

$$\mathfrak{g}_f \ni X \longmapsto \sqrt{-1}\,(X,f) \in \sqrt{-1}\,\mathbb{R}$$

となるものが存在するとき，fや$\mathcal{O}_f$を integral であるという。指標η_fには$(G_f/G_f^0)^\wedge \cong \pi_1(\mathcal{O}_f)^\wedge$だけの自由度があるが，$\eta_f$の全体を$\mathcal{L}_f$とかく。

一方，${}^\forall f\in\mathfrak{g}'$における polarization とは，$\mathfrak{g}$の複素化$\mathfrak{g}_c$の部分環$\mathfrak{h}$で次の条件1) 2) 3)を満すものである。

1) $\mathfrak{h}<f$なる極大部分環である。(実は，$\mathfrak{h}$極大 $\Longleftrightarrow \dim_c\mathfrak{h}=\dim\mathfrak{g}-\frac{1}{2}\dim\mathcal{O}_f$.)

2) $\mathfrak{h}$はG_f-不変。

3) $\mathfrak{h}+\bar{\mathfrak{h}}$は$\mathfrak{g}_c$の部分環(ここに$X\mapsto\bar{X}$は$\mathfrak{g}_c$の$\mathfrak{g}$に関するconjugation)。

すると，$\mathfrak{d}=\mathfrak{g}\cap\mathfrak{h}$，$\mathfrak{e}=\mathfrak{g}\cap(\mathfrak{h}+\bar{\mathfrak{h}})$は$\mathfrak{g}$の部分環で

$\mathfrak{g}_f\subset\mathfrak{d}\subset\mathfrak{e}\subset\mathfrak{g}$．さらに，$D^0$, E^0を$\mathfrak{d}$, $\mathfrak{e}$に対応するGの解析的部分群とすると，$D=D^0G_f$, $E=E^0G_f$はGの部分群である。この$\mathfrak{h}$が次の

Pukanszky条件：$\rho(E)f=\rho(E^0)f$は$\mathfrak{g}'$で閉，

を充すとする。そのとき，D, EはGで閉；D^0, E^0はD, Eの連結成分，従って閉，となる。それにfを integrable とする

と, $\forall \eta_f \in \zeta_f$ に対し, $D = D^\circ G_f$ の指標 χ_f で

(6.1) $$\delta\chi_f = \sqrt{-1}\, f|\mathfrak{d}$$

となり, η_f の拡張であるものが唯一つ存在する. $\mathfrak{X} = D\backslash E$ の一点 D における接空間を $\mathfrak{e}/\mathfrak{d}$ と同一視すると,

$\mathfrak{d}_c = \mathfrak{h}\cap\bar{\mathfrak{h}}$, $\mathfrak{e}_c = \mathfrak{h}+\bar{\mathfrak{h}}$ により

(6.2) $$(\mathfrak{e}/\mathfrak{d})_c \cong \mathfrak{h}/\mathfrak{d}_c + \bar{\mathfrak{h}}/\mathfrak{d}_c .$$

$\mathfrak{X}$ 上に $\mathfrak{h}/\mathfrak{d}_c$ を反解析的接空間とするような E-不変複素構造が入る. また,

(6.3) $$B_f(X,Y) = ([X,Y], f) \quad (X,Y\in\mathfrak{g})$$

に関し $\mathfrak{e}$ と $\mathfrak{d}$ とは直交するので, §3.3 に於けると同様に, $\mathfrak{e}\times\mathfrak{e}$ 上の交代形式 $B_f|\mathfrak{e}\times\mathfrak{e}$ から $\mathfrak{X} = D\backslash E$ 上の E-不変な測度 $\mu_{\mathfrak{X}}$ が作られる. この $\mu_{\mathfrak{X}}$ を用いて, §1.6 の如く E の誘導表現 $S = \mathrm{Ind}_{D\uparrow E}\,\chi_f$ を作ると, S の表現空間 $\mathcal{H}^S$ は

(6.4) $$Z\varphi = \sqrt{-1}(Z,f)\varphi \quad (Z\in\mathfrak{h})$$

を満す $\varphi\in\mathcal{H}^S$ 全体 $\mathcal{H}_1$ を不変閉部分空間として含む. S の部分表現 $S|\mathcal{H}_1$ を $\mathrm{ind}_E(\eta_f,\mathfrak{h})$ とかく. ($\mathfrak{d} = \mathfrak{e}$, i.e., $\mathfrak{h}=\bar{\mathfrak{h}}$ ならば $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}^S$.)

(6.5) $$\mathrm{ind}(\eta_f,\mathfrak{h}) \overset{\mathrm{def}}{=\!=} \mathrm{Ind}_{E\uparrow G}(\mathrm{ind}_E(\eta_f,\mathfrak{h}))$$

とおく. かくて, integral な $f\in\mathfrak{g}'$ に於ける polarization $\mathfrak{h}$ が Pukanszky 条件をみたすとき G の表現 $\mathrm{ind}(\eta_f,\mathfrak{h})$ を得る [2].

さて，ここで G を可解とする．f における polarization $\mathfrak{h}$ が次の条件を充すとき <u>admissible</u> という．

a) $\mathfrak{h}$ は <u>positive</u> である．(すなわち，$X+iY \in \mathfrak{h}$ $(X, Y \in \mathfrak{g})$ ならば，$B_f(X, Y) \geqq 0$，かつ，$=0$ となるのは，$X \in \mathfrak{d}$ または $Y \in \mathfrak{d}$ のときにかぎる．)

b) $\mathfrak{n}$ を $\mathfrak{g}$ の巾零根基とすると，$\mathfrak{n}_c \cap \mathfrak{h}$ は $h = f|\mathfrak{n}$ に於ける $\mathfrak{n}$ の polarization である．

c) G は $\mathfrak{n}$ の相対 $\mathfrak{n}'$ 上に自然に働くが，$h = f|\mathfrak{n}$ の固定群を G_h としたとき，$\mathfrak{h}$ は G_h-不変である．

$\mathfrak{h}$ が admissible ならば Pukanszky 条件を充すことが分っている．そして，

<u>命題 6.1</u> (Auslander-Kostant [2])．

G を単連結，可解リー群とする．

(i) $f \in \mathfrak{g}'$ が integral，$\mathfrak{h}$ が f における admiss. polarization ならば，$\forall \eta_f \in \mathcal{L}_f$ に対し，$\mathrm{ind}(\eta_f, \mathfrak{h})$ は既約であり，admiss. pol. $\mathfrak{h}$ のとり方にはよらないが η_f が異なれば同値ではない．

(ii) $\forall f \in \mathfrak{g}'$ に対し，f に於ける admiss. pol. $\mathfrak{h}$ が存在する．

(iii) さらに G を I 型とすると，

(イ) $\forall f \in \mathfrak{g}'$ は integral．

(ロ) G の任意の IUR は この型の表現に同値である．

(ハ) 任意の軌道 $O \subset \mathfrak{g}'$ で $\pi_1(O)^\wedge \cong \zeta_f$ $(\forall f \in O)$ であるから, $\zeta_f \ni \eta_f \longmapsto \mathrm{ind}(\eta_f, \mathfrak{h})$ により次の全単射を得る.

$$\coprod_{O \in \hat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}'/p(G)} \pi_1(O)^\wedge \longrightarrow \hat{G}.$$

(B) 指標の積分表示 (Pukanszky [11(e)]).

次の仮定の下で, 連結かつ単連結可解リー群 G の指標が部分的に求まっている. この仮定は Exp. Lie group のときと同じである.

仮定 $\begin{cases} \text{1) } \mathfrak{g} \text{ は代数的. (このとき } G \text{ は I 型, 従って, GCR となる.)} \\ \text{2) IUR, } T \text{ に対応する軌道 } O \subset \mathfrak{g}' \text{ (命題6.1) は閉.} \end{cases}$

$\mathfrak{g}$ の原点 0 の近傍 V を

$$V = \{ X \in \mathfrak{g} \,;\, |\mathrm{Im}\, \alpha(X)| < 2\pi \quad \forall \text{root } \alpha \}$$

とおくと, $\exp : \mathfrak{g} \to G$ は V から $\exp V$ への解析同型である. 族 $\Phi(T) \subset \mathcal{D}(G)$ を次のようにとる.

(6.6) $\Phi(T) = \{ \varphi \in \mathcal{D}(\exp V) \,;\, T(\varphi) \geq 0 \text{ (正定値)} \}$.

命題 6.2. 上の仮定の下で,

(i) $\mathfrak{U}_T \supset \mathcal{D}(G)$, すなわち, $(\forall \varphi \in \mathcal{D}(G))$ $T(\varphi)$ は H.-S. 型.

(ii) $\mathfrak{M}_T \supset \Phi(T)$, すなわち, $(\forall \varphi \in \Phi(T))$ $T(\varphi)$ は trace class.

(iii) T に対応する軌道 O 上の適当な G-不変測度 $d\nu$ をとると

(6.7) $\pi(\varphi) = \mathrm{tr}(T(\varphi)) = \int_O \hat{\varphi}(f)\, d\nu(f) \quad (\forall \varphi \in \Phi(T)).$

ここに, 右辺の積分は絶対収束で,

$$
(6.8)\quad \begin{cases} \psi(X) = \Delta^{\frac{1}{2}}(\exp X)\cdot P_O(X)\cdot \varphi(\exp X), \\ P_O(X) = \displaystyle\prod_{\alpha\in\mathcal{F}_O^1} \frac{e^{\frac{1}{2}\alpha(X)} - e^{-\frac{1}{2}\alpha(X)}}{\alpha(X)} \cdot \prod_{\beta\in\mathcal{F}_O^2} \frac{e^{\beta(X)}-1}{\beta(X)}. \end{cases}
$$

$\mathcal{F}_O^i$ は O によってきまる $\mathfrak{g}$ の root の集合で $\mathcal{F}_O^1 \cap \mathcal{F}_O^2 = \phi$.
すなわち，族$\Xi(T)$に対する π_T の次の積分表示を得た.

$$
\pi_T = \Delta^{\frac{1}{2}}\cdot\mu \quad , \quad \mu = P_O(X)\cdot \mathcal{F}(dv) \quad (\in \mathcal{D}'(\mathfrak{g})).
$$

(iv) 測度 dv は (3.10) で与えられる.

注意6.1. 同じ軌道 O に対応する IUR は $\zeta_f \cong \pi_1(O)^\wedge$ だけ同値でないものがある.（$\pi_1(O)^\wedge$ は何次元かの torus である.）ところが積分表示 (6.7), (6.8) はこれら全ての表現に対して共通であるから，非常に不十分なものと言わざるを得ない. これは写像 $\exp : \mathfrak{g} \to G$ が 1-1 でないことから来る上の型の積分表示の限界でもあろうか？（注意 8.1, 9.1 参照）

§7. コンパクト半単純群の指標の積分表示

G を連結かつ単連結なコンパクト半単純群，H をその Cartan 部分群，$\mathfrak{h}$ を H のリー環とする. $(\mathfrak{g}_c, \mathfrak{h}_c)$ の root α は全て $\alpha \in \sqrt{-1}\,\mathfrak{h}'$ である. 一つの順序に関する単純 root の全体を $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ とし，$\rho = \sqrt{-1}\,\rho' = \frac{1}{2}\sum_{\alpha>0}\alpha$ $(\rho' \in \mathfrak{h}')$ とおく.

$$
(7.1)\qquad (X, Y) \overset{\text{def}}{=\!=} \operatorname{tr}(\operatorname{ad}X\cdot\operatorname{ad}Y) \qquad (X, Y\in\mathfrak{g})
$$

により，$\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{g}'$，$\mathfrak{h}$ と $\mathfrak{h}'$ を同一視する. $\mathfrak{h}$ の部分集合

$$\Lambda = \left\{ \lambda \in \mathfrak{h} \cong \mathfrak{h}' ;\ \frac{2(\sqrt{-1}\lambda, \alpha_i)}{(\alpha_i, \alpha_i)} \geqq 0 \text{ 整数 } (1 \leq i \leq r) \right\}$$

をとる。最高weightが $\sqrt{-1}\lambda$ $(\lambda \in \Lambda)$ である G のIURを T_λ とし その指標 $\pi_\lambda(g) = \mathrm{tr}(T_\lambda(g))$ $(g \in G)$ の積分表示を考える。さて $\sigma(G) = \mathrm{ad}(G)$ による $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{g}'$ の軌道のうち，次元が最大のものは

$$(7.2) \qquad O(\lambda) = O_{\lambda+\rho'} = \sigma(G)(\lambda+\rho') \qquad (\lambda \in \Lambda)$$

の形であり，$O(\lambda) \cong G/H$ で 皆 integral である。$\mathfrak{h}$上の函数

$$(7.3) \qquad P(X) = \prod_{\alpha>0} \frac{e^{\frac{1}{2}\alpha(X)} - e^{-\frac{1}{2}\alpha(X)}}{\alpha(X)} \qquad (X \in \mathfrak{g})$$

は G-不変な $\mathfrak{g}$ 上の函数に一意的に拡張され，

$$p(Y)^2 = \left| \det\left(\frac{e^{\mathrm{ad}Y} - 1}{\mathrm{ad}Y} \right) \right| \quad (Y \in \mathfrak{g})$$

となる。写像 $\exp$: $\mathfrak{g} \to G$ は 1-1 でないので，ここでは $\varphi \in \mathcal{D}(\mathfrak{g})$ に対し，新たに $T_\lambda'(\varphi)$ を次のように定義する。G上のHaar測度 dg は $\mathfrak{g}$ 上の dX を適当にとれば $d(\exp X) = P(X)^2 dX$ となっているので

$$(7.4) \qquad T_\lambda'(\varphi) = \int_{\mathfrak{g}} T_\lambda(\exp X)\, \varphi(X) \cdot P(X)^2 dX$$

とおく。そのとき，

<u>命題7.1.</u>

(i) $O(\lambda)$上の G-不変測度 $d\nu$ があって，

$$\mathrm{tr}(T_\lambda'(\varphi)) = \int_{O(\lambda)} \hat{\psi}(f)\, d\nu(f),$$

ここに，$\psi(X) = P(X) \cdot \varphi(X)$. ([11(a)], [8(c)])

すなわち, $\pi_\lambda' : \varphi \longmapsto tr(T_\lambda'(\varphi))$ を $\mathcal{D}'(\mathfrak{g})$ の元として表示すると

$$\pi_\lambda' = P(X) \cdot \mathcal{F}(dv).$$

(ii) 上の π_λ' の表示から 函数としての指標 $\pi_\lambda(g)$ の表示を得る:

$$\pi_\lambda(\exp X) = tr(T_\lambda(\exp X)) = P(X)^{-1} \cdot \mathcal{F}(dv) \quad (X \in \mathfrak{g}).$$

(iii) 測度 dv は (3.11) で与えられる (Kirillov[8(c)]).

(Pukanszky による dv の表示には, 計算されてない定数が含まれている[11(c)].)

§8. 複素半単純リー群の指標の積分表示

G を連結かつ単連結な複素半単純リー群, H をその Cartan 部分群, $\mathfrak{h}$ を H のリー環とする. $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ の正の root 全体に対応する巾零部分群を N, $P = NH$ とする. ここでは $\mathfrak{g}', \mathfrak{h}'$ を $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ の $\mathbb{C}$ 上の双対空間とする. $\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{g}'$, $\mathfrak{h}$ と $\mathfrak{h}'$ を ($\mathbb{C}$ 上の) Killing form (7.1) により同一視する. 単純 root 全体を $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r (\in \mathfrak{h}' \cong \mathfrak{h})$ とし, $\mathfrak{h} \cong \mathfrak{h}'$ の部分集合

$$\Lambda = \left\{ \lambda \in \mathfrak{h} ;\ \frac{2(\sqrt{-1}\lambda, \alpha_i)}{(\alpha_i, \alpha_i)} \text{ 整数 } (1 \leq i \leq r) \right\}$$

をとる. P の任意の (ユニタリ) 指標は, $\exists \lambda \in \Lambda$,

$$\chi_\lambda(\exp X \cdot n) = e^{\sqrt{-1}(X, \lambda)} \quad (X \in \mathfrak{h})$$

の形である. 従って P の指標全体は $\hat{H} \cong \Lambda$ と同一視できる.

$$(8.1) \qquad T_\lambda = \operatorname*{Ind}_{P \uparrow G} \chi_\lambda ,$$

として得られるGの表現は全て既約である。これをGの主系列の表現という。T_λ の指標 π_λ は G 上の函数として具体的に計算されている。それとは別に T_λ の指標を §3.3 の意味で積分表示してみる。その積分表示から G の Plancherel の公式も導かれる（E. A. Gutkin [5]）。軌道 $O\subset\mathfrak{g}$ の閉包 $\overline{O}$ が $O_\lambda=\sigma(G)\lambda$ を含むような O は有限個であり、そのうち、最高次元のもの、Ω_λ、が唯一つ存在する。$\lambda\in\Lambda$ が正則ならば $\Omega_\lambda=O_\lambda=\overline{O_\lambda}$、一般には $\mathfrak{g}_\lambda$ を λ の $\mathfrak{g}$ における centralizer とし、$Y\in\mathfrak{g}_\lambda$ を $\mathfrak{g}_\lambda$ の quasi-regular（すなわち、Y の $\mathfrak{g}_\lambda$ における centralizer の次元が最高）な巾零元とすれば

(8.2) $$\Omega_\lambda = O_{\lambda+Y} = \sigma(G)(\lambda+Y) \qquad (\overline{\Omega_\lambda}\supset O_\lambda),$$

である。$\mathfrak{g}$ 上の函数 $p(X)$ を

(8.3) $$p(X)=\left|\det\left(\frac{e^{\mathrm{ad}X}-1}{\mathrm{ad}X}\right)\right| \qquad (X\in\mathfrak{g})$$

とおく（$p(0)=1$）。G 上の Haar 測度 dg に対し $\mathfrak{g}$ 上の dX を適当にとれば $d(\exp X) = p(X)^2 dX$ となる。そこで $\forall\varphi\in\mathcal{D}(\mathfrak{g})$ に対し、§7 と同様に

(8.4) $$T'_\lambda(\varphi) = \int_{\mathfrak{g}} T_\lambda(\exp X)\,\varphi(X)\cdot p(X)^2 dX$$

とおく。一方 $\mathfrak{g}$ の原点 0 の近傍 V_0 を

(8.5) $$V_0=\{X\in\mathfrak{g}\ ;\ \mathrm{ad}X \text{ の全ての固有値 } \nu,\ |\mathrm{Im}\,\nu|<\pi\}$$

ととれば $\exp$ は V_0 から $\exp V_0$ への解析同型を与える。

命題8.1 [5]. 軌道 Ω_λ を上のようにとる ($\overline{\Omega_\lambda} \supset \mathcal{O}_\lambda$). Ω_λ 上に (3.11) で与えられる G-不変測度 dv をとれば,

(8.6) $$tr(T'_\lambda(\varphi)) = \int_{\Omega_\lambda} \hat{\psi}(f)\, dv(f) \quad ({}^\forall \varphi \in \mathcal{D}(V_0)).$$

ここに
$$\psi(X) = p(X)\cdot \varphi(X) \quad (X \in \mathfrak{g}).$$

すなわち, 族 $\Phi = \mathcal{D}(V_0)$ に対し,
$$tr(T'_\lambda(\varphi)) = (p(X)\cdot \mathcal{F}(dv),\ \varphi).$$

注意8.1. 上の表示(8.6)で φ の台は原点0の近傍に限られているが, これで指標 π_λ は完全に決定される. 何故なら G の任意の IUR, T に対し, $p(X)\pi_\lambda(\exp X)$ ($X \in \mathfrak{h}$) は実解析函数であることが分っている. また H は連結であるから $\pi_\lambda(\exp X)$ は $V_0 \cap \mathfrak{h}$ での値で完全に決まる. (注意6.1, 9.1 参照) また $\lambda \in \Lambda$ の固定群 G_λ は連結 ([6], p.482) で, $\mathcal{O}_\lambda \cong G/G_\lambda$ は単連結である. 実半単純リー群の場合はそうとは限らない. また $\overline{\mathcal{O}_\lambda} = \mathcal{O}_\lambda$ (${}^\forall \lambda \in \Lambda$).

§9. 実半単純リー群の指標の積分表示

G を連結な実半単純リー群とする. $G = KAN$ を岩沢分解とし, $M, \tilde{M}$ を A の K における中心化群, 正規化群とする. $P = MAN$, $W_A = \tilde{M}/M$ とおく. $\mathfrak{a}, \mathfrak{m}$ を A, M のリー環, $\mathfrak{a}', \mathfrak{m}'$ をそれらの双対空間とする. $\mathfrak{g}$ の Killing formにより, $\mathfrak{g}$と$\mathfrak{g}'$, $\mathfrak{a}$と$\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{m}$と$\mathfrak{m}'$を同一視する. さて, Pの任意の有限次元のIUR, Lはある$f_0 \in \mathfrak{a}' \cong \mathfrak{a}$, $\eta \in \hat{M}$を用いて

$$L(m \cdot \exp X \cdot n) = e^{i(X, f_0)} \cdot \eta(m) \quad (X \in \mathfrak{a}, m \in M, n \in N)$$

と書かれる. $T^L = T_{f_0, \eta} = \mathrm{Ind}_{P \uparrow G} L$ とおく. このうち既約なものをGの連続主系列の表現というが; それらの指標π_λはG上の函数として具体的に求まっている. W_Aは群MA上に働くが $L^w(h) = L(h^w)$ $(h \in MA)$ とおいたとき, $W_A \ni {}^\forall w \neq e$ に対し, $L^w \not\cong L$ ならば, T^Lは既約である(F. Bruhat). とくに$f_0 \in \mathfrak{a}$がW_A-正則(すなわち, $W_A \ni {}^\forall w \neq e$ に対し $f_0^w \neq f_0$)ならば 明らかに $L^w \not\cong L$ $({}^\forall w \neq e)$となる. $\mathfrak{a}$の元のうちW_A-正則なもの全体を$\mathfrak{a}^r$と書く. M. Duflo [4] は次の仮定の下に, T^Lの指標の積分表示を得た.

仮定
1) $f_0 \in \mathfrak{a}$ は W_A-正則 (i.e., $f_0 \in \mathfrak{a}^r$),
2) Mの中心をZ_M, 単位元eの連結成分をM^0としたとき, $M = M^0 \cdot Z_M$.

仮定2)の下で $\eta | M^0$ は既約になるので

$$\hat{M} \cong \hat{M^0} \times (M/M^0)^\wedge \cong \hat{M^0} \times (Z_M / Z_M \cap M^0)^\wedge$$

である. M^0はコンパクトとは限らないが, reductiveで $M^0/M^0 \cap Z_M$ はコンパクトであるから, §7の結果が使える.

$\mathfrak{h}=\mathfrak{a}+\mathfrak{h}_-$ ($\mathfrak{h}_-=\mathfrak{h}\cap\mathfrak{m}$) を$\mathfrak{g}$の Cartan 部分環とする. $\mathfrak{m}$の中心を$\mathfrak{c}_\mathfrak{m}$, $\mathfrak{m}_1=[\mathfrak{m},\mathfrak{m}]$ とすれば $\mathfrak{m}=\mathfrak{c}_\mathfrak{m}+\mathfrak{m}_1$ (直和),
$\mathfrak{h}_-=\mathfrak{c}_\mathfrak{m}+\mathfrak{h}_-\cap\mathfrak{m}_1$ となり $\mathfrak{h}_-$, $\mathfrak{h}_-\cap\mathfrak{m}_1$ はそれぞれ $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{m}_1$ の Cartan 部分環である. コンパクト半単純リー環 $\mathfrak{m}_1$ に対し, §7の如く $\Lambda_{\mathfrak{m}_1}\subset\mathfrak{h}_-\cap\mathfrak{m}_1$, $\rho'_{\mathfrak{m}_1}\in\mathfrak{h}_-\cap\mathfrak{m}_1$ をきめ, $\Lambda_\mathfrak{m}=\mathfrak{c}_\mathfrak{m}+\Lambda_{\mathfrak{m}_1}\subset\mathfrak{h}_-$ とおく. 表現 $\eta|M^0$ に対して, $\exists_1\,\lambda_\mathfrak{m}\in\Lambda_\mathfrak{m}$ で $f_1=\lambda_\mathfrak{m}+\rho'_{\mathfrak{m}_1}\in\mathfrak{h}_-$ の M^0-軌道上で積分表示(7.5)が成立する.

一方 $f=f_0+f_1=f_0+(\lambda_\mathfrak{m}+\rho'_{\mathfrak{m}_1})\in\mathfrak{h}$ は $L|M^0A$ を決定する: $L|M^0A\leftrightarrow(f_0,\eta|M^0)\leftrightarrow(f_0,f_1)$. $O_f=\sigma(G)f\cong G/G_f$ は一般には単連結でなく, $\pi_1(O_f)\cong G_f/G_f^0$. fのNにおける中心化群を$Z_N(f)$とすれば, 仮定1)の下で,

$G_f=Z_N(f)\cdot H$, $G_f^0=Z_N(f)\cdot H^0$, ここに H は$\mathfrak{h}$に対応するGの Cartan 部分群, H^0は Hのeを含む連結成分である. さらに仮定2)があれば $H=H^0Z_M$ となる. 従って, 仮定1),2)の下で,

$$\pi_1(O_f)\cong G_f/G_f^0\cong H/H^0\cong Z_M/Z_M\cap M^0\cong M/M^0,$$

となる([6], §16参照). そして, T^L相互間の同値性を考慮に入れれば, T^Lの同値類は, 軌道 $O=O_f\subset\mathfrak{g}$ ($f\in\mathfrak{a}'+\Lambda_\mathfrak{m}+\rho'_{\mathfrak{m}_1}$) にわたる $\pi_1(O)^\wedge$ の合併

$$\coprod\pi_1(O)^\wedge$$

と1-1に対応することが分る(命題6.1(iii)参照).

(9.1) $$p(X) = \left| \det\left(\frac{e^{\mathrm{ad}\, X} - 1}{\mathrm{ad}\, X} \right) \right|^{1/2} \quad (X \in \mathfrak{g})$$

とおく。G, $\mathfrak{g}$ 上の dg, dX を適当にとれば $d(\exp X) = p(X)^2 dX$ となる。$^\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathfrak{g})$ に対し §§7, 8 と同様に

(9.2) $$(T^L)'(\varphi) = \int_{\mathfrak{g}} T^L(\exp X)\, \varphi(X) \cdot p(X)^2 dX$$

とおく。$\mathfrak{g}$ の原点 0 の近傍 V_0 を (8.5) で与えられるものとすると、exp は V_0 から $\exp V_0$ への解析同形を与える。

__命題 9.1.__ T^L に対応する $\mathfrak{g}$ の軌道を O とし、O 上に (3.11) によって与えられる G-不変測度を $d\nu$ とする。仮定 7.2) の下で

(9.3) $$\mathrm{tr}\left((T^L)'(\varphi)\right) = \int_O \hat{\psi}(l)\, d\nu(l) \quad (^\forall \varphi \in \mathcal{D}(V_0)),$$

ここに $\psi(X) = p(X) \cdot \varphi(X) \quad (X \in \mathfrak{g})$,

が成立する。

__注意 9.1.__ $T = T^L$ の指標 π_T の積分表示 (9.3) は $\mathrm{supp}(\varphi) \subset V_0$ という制限があるため T^L を完全には決定しない。実際、同じ軌道 O に対応する T^L は $\pi_1(O)^\wedge$ 分だけ沢山ある訳だが、表示 (9.3) はこれら全てに対して共通である。例えば $G = SL(2, \mathbb{R})$ のとき、

$$H_\pm = \left\{ \pm \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} ; t \in \mathbb{R} \right\}$$ とおけば $H = H_+ \cup H_-$,

$\exp V_0 \supset H_+$, $\exp V_0 \cap H_- = \phi$ となる。従って表示 (9.3) は H_+ 上で π_T を決定するが、H_- 上では情報を与えない。ところが同じ軌道 O に対応する T^L が 2 個あって、それらの指

標は H_+ 上では一致するが，H_- 上では符号だけ異なる（注意6.1, 8.1 参照）。

注意9.2. $M = M^0 \cdot Z_M$ とならぬ例は $G = \widetilde{SL(2,\mathbb{R})}$（普遍被覆群，$n \geqq 3$）で与えられる。このとき M は非可換有限群（位数 2^n）である。また M^0 がコンパクトでない例は $G = \widetilde{SU(p,q)}$ $(p \neq q)$ で与えられる。

§10. Kirillov の "Reduction Theorems" について

Kirillov は既約表現の指標の積分表示を $\dim G$ に関する帰納法で証明しようとしている。まず，G を半単純でない連結リー群とし，T をその IUR とすれば，次の4つの場合が起る。

(1) T の核の中に閉連結可換正規部分群 G_0 $(\dim \geqq 1)$ がある。

(2) 閉連結可換正規部分群 A $(\dim \geqq 1)$ があって $T|A$ がスカラーでない。

(3) G は次のような巾零リー群 N を含む。(i) N のリー環 $\mathfrak{n}$ は $X_1, X_2, \cdots, X_k, Y_1, \cdots, Y_k, Z$ で張られ，$[X_i, Y_j] = \delta_{ij} Z$，その他の交換子積は全て 0。(ii) Z は $\mathfrak{g}$ の中心の元である。

(iii) $T(\exp tZ) = e^{i\lambda t}$ $(\exists \lambda \neq 0)$。

(4) G は半単純群 S と1次元の $\mathbb{R}$ との直積である：$G \cong S \times \mathbb{R}$.

彼はそれぞれの場合にいわゆる reduction theorem を証明した。

(1)の場合．T から自然に G/G_0 の表現 S が得られる．S

に対して，指標π_Sの積分表示が成立していれば，Tの指標π_Tの積分表示が得られる．(1st reduction theorem [8(c)])．

<u>(2)の場合</u>．TからGの真部分群HとそのIUR，Uが具体的にきまって，$T \simeq \mathrm{Ind}_{H \uparrow G} U$となる．指標$\pi_U$の積分表示が成立していれば，それから指標$\pi_T$の積分表示が得られる．(2nd reduction theorem [8(c)])．

<u>(3)の場合</u>．TからGの真部分群HとそのIUR，Sが具体的にきまって指標π_Sの積分表示が成立していれば，それから指標π_Tの積分表示が得られる．この場合TとSの関係は(2)の場合と違ってやや複雑である．(3rd reduction theorem [8(c)])．

既にこの小文も予想外の頁数を費し，筆者も労れたので詳しくは原論文にあたられたい．なお，§§5-8でつねに問題になったことだが，$\exp : \mathfrak{g} \to G$が1-1でないことから来る困難を避けようとして，Kirillovは，$\mathcal{D}(G)$のかわりに$\mathcal{D}(\mathfrak{g})$をとって，Tの指標を次のように定義した．

$\varphi \in \mathcal{D}(\mathfrak{g})$に対し
$$T[\varphi] \overset{\mathrm{def}}{=} \int_{\mathfrak{g}} T(\exp X)\,\varphi(X)\,dX$$

とおき，$\varphi \longmapsto \mathrm{tr}(T[\varphi])$をTの指標というのである．しかし，§§5-8で見た如く，この考え方が成功していると言えるのはまだコンパクト群の場合だけである．

付記 川中宣明氏より有限Chevalley群の既約指標に対しても部分的にだが、類似の積分表示が成立していることを注意していただいた。リー環上の不変測度の"Fourier変換"を用いて指標が表されるというのである(T. A. Springer [*] 参照)。Springer自身はHarish-Chandraによる(多分、コンパクト群の場合の)結果から誘発されたと書いている。

引用文献

(1) M. F.Atyah-R.Bott: A Lefschetz fixed point formula for elliptic complexes. II. Applications, Ann. Math., 88-3(1968), 451-491.

(2) L.Auslander-B.Kostant: Polarization and unitary representations of solvable Lie groups, Inv. Math., 14(1971), 255-354.

(3) J. Dixmir:
- (a) Sur les représentations unitaires des groupes de Lie nilpotents.IV, Can. J. Math., 11(1959), 321-344.
- (b) Sur les représentations unitaires des groupes de Lie nilpotents.V, Bull. Soc. Math. France, 87(1959), 65-79.
- (c) Les C*-algèbres et leurs représentations, 1964, Gauthier-Villars, Paris.

(4) M. Duflo(M.Дюфло): Representations of principal series of semisimple Lie groups, Functional Analysis and its Applications, 4-2(1970),38-42.

(5) E. A. Gutkin (E. A. Гуткин): Representations of principal series of complex semisimple Lie groups, Funct. Anal. Appl., 4-2(1970), 32-37.

(6) Harish-Chandra: Invariant eigendistributions on a semisimple Lie group, Trans. Amer. Math. Soc., 119(1965), 457-508.

(7) T. Hirai:
- (a) The characters of irreducible representations of the Lorentz group of n-th order,Proc. Japan Acad., 41(1965), 526-531.
- (b) Classification and the characters of irreducible representations of SU(p, 1), ibid., 42(1966), 907-912.
- (c) The characters of some induced representations of semisimple Lie groups, J. Math. Kyoto Univ., 8(1968),313-363.

(d) Invariant eigendistributions of Laplace operators on real simple Lie groups. I. Case of SU(p, q), Japanese J. Math., 22(1970), 1-68.
(e) 実半単純リー群の表現の指標と不変固有超函数, 23-4(1971), 241-260.
(f) Structure of induced representations and characters of irreducible representations of complex semisimple Lie groups, International Conference on Harmonic Analysis at Univ. of Maryland, Lecture Notes in Math., Springer.

(8) A. A. Kirillov:
(a) Unitary representations of nilpotent Lie groups, U. Math. Nauk, 17-4 (1962), 57-101.
(b) Method of orbits in the theory of unitary representations of Lie groups, Funct. Anal. Appl., 2-1(1968), 96-98.
(c) Characters of unitary representations of Lie groups, ibid., 2-2(1968), 40-55.
(d) Characters of unitary representations of Lie groups. Reduction theorems, ibid., 3-1(1969), 36-47.

(9) B. Kostant:
(a) Quantization and unitary representations, Lectures in Modern Analysis. II, Lecture Notes In Math., Springer.
(b) Orbits and quatization theory, Internat. Math. Congress (1970), Vol.2, 395-400.

(10) R. L. Lipsman: On the characters and equivalence of continuous series representations, J. Math. Soc. Japan, 23-3(1971), 452-480.

(11) L. Pukanszky:
(a) Leçon sur les représentations des groupes, 1967, Dunod, Paris.
(b) On the characters and the Plancherel formula of nilpotent groups, J. Funct. Anal., 1(1967), 255-280.
(c) On the theory of exponential groups, Trans. Amer. Math. Soc., 126 (1967), 487-507.
(d) On the unitary representations of exponential groups, J. Funct. Anal., 2(1968), 73-113.
(e) Characters of algebraic solvable groups, ibid., 3(1969), 435-494.

(12) H. Shin'ya: Spherical functions on locally compact groups, J. Math. Kyoto Univ., 12-1(1972), 55-85.

(13) N. Tatsuuma: Plancherel formula for non-unimodular locally compact groups, J. Math. Kyoto Univ., 12-1(1972), 179-261.

(14) D. P. Zhelobenko (Д. П. Желобенко): Operational calculus on complex semisimple Lie groups, Izv. Akad. Nauk CCCP, 33(1969), 931-973.

(*) T. A. Springer: Generalization of Green's polynomials, preprint.